1 Grupa

Półgrupą nazywa się zbiór G, w którym określono dwuargumentowe działanie łączne tzn. spełniające warunek: dla wszystkich $a, b, c \in G$ zachodzi: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Zbiór G z (dobrze) określonym na nim dwuargumentowym działaniem $\circ$ nazywa się **grupą**, jeżeli ma on następujące własności:

- **Wewnętrzność**: dla dowolnych elementów a i b ze zbioru G ich wynik $a \circ b$ również należy do zbiory G; mówi się wtedy, że zbiór G jest zamknięty ze względu na działanie $\circ$.
- **Łączność**: dla wszystkich a, b i c należących do G zachodzi: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- **Element neutralny**: istnieje element e w zbiorze G spełniający dla dowolnego elementu a z tego zbioru warunek: $a \circ e = a$.
- **Odwracalność**: dla każdego $a \in G$ musi istnieć $x \in G$, dla których $a \circ x = e$.

Grupa to para uporządkowana $(G, \circ)$; zbiór G nazywa się nośnikiem grupy z działaniem $\circ$. Grupę $(G, \circ)$ spełniającą piąty aksjomat:

- **Przemienność**: dla dowolnych elementów a, b zbioru G spełniona jest równość $a \circ b = b \circ a$;

nazywa się grupą przemienną (lub abelową od nazwisko Nielsa Abela 1802 - 1829).

Przykład. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych) z działaniem $*$ określonym wzorem $a * b = a + b - 2$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}$. Czy struktura $(\mathbb{Z}, *)$ jest grupą?

Przykłady
Niech A oznacza niepusty zbiór, a $\mathcal{P}(A)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Zbiór $\mathcal{P}(A)$ tworzy grupę z działaniem różnicy symetrycznej Δ. Sprawdzić, że spełnione są aksjomaty grupy.

Sprawdzić, że zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania tworzy grupę przemienną.

Sprawdzić, że zbiór reszt z dzielenie przez 7 tworzy grupę z działaniem dodawania modulo 7. Znaleźć elementy odwrotne dla każdego elementu grupy.

2 Pierścień

Strukturę algebraiczną $(R, +, \cdot, 0)$, w której R jest pewnym niepustym zbiorem, symbole $+, \cdot$ oznaczają dwa działania dwuargumentowe w tym zbiorze, a 0 jest pewnym wyróżnionym elementem zbioru R nazywa się **pierścieniem** (*łącznym*) jeśli:

- struktura $R^+ = (R, +, 0)$ jest grupą przemienną z działaniem $+$ nazywanym dodawaniem i elementem neutralnym 0 nazywanym zerem.
- struktura $(R, \cdot)$ jest półgrupą z działaniem $\cdot$ nazywanym mnożeniem
- oba działania powiązane są ze sobą prawami rozdzielnoci: dla wszystkich $a, b, c \in R$ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Ponieważ R^+ jest grupą, to pierścień ma dokładnie jedno zero, a element przeciwny do a względem dodawania, nazywany **elementem przeciwnym** jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczany $-a$.

Na działanie mnożenia nakłada się często dodatkowe warunki, precyzując nazwę nowej strultury:

- **pierścień z jedynką** - istnienie elementu neutralnego mnożenia nazywanego **jedynką**: istnieje $1 \in R$ taki, że dla każdego $a \in R$ zachodzi $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- **pierścień przemienny** - przemienność mnożenie (wówczas przawa rozdzielności stają się sobie równoważne): dla każdych $a, b \in R$ zachodzi: $a \cdot b = b \cdot a$.
- **pierścień z dzieleniem** - dowolny niezerowy element ma element odwrotny (zakłada się, że pierścień ma jedynkę): dla każdego $a \in R \setminus \{0\}$ istnieje $b \in R$ takie, że $a \cdot b = 1$.

3 Ciało

Ciałem nazywa się pierścień przemienny z dzieleniem.

Przykładami ciał są: liczby wymierne, liczby rzeczywiste, liczby zespolone.

Kolejność opisuje własność bycia podciałem. Czyli liczby wymierne są podciałem ciała liczb rzeczywistych a także ciała liczb zespolonych, Ciało liczb rzeczywistych jest podciałem ciała liczb zespolonych.